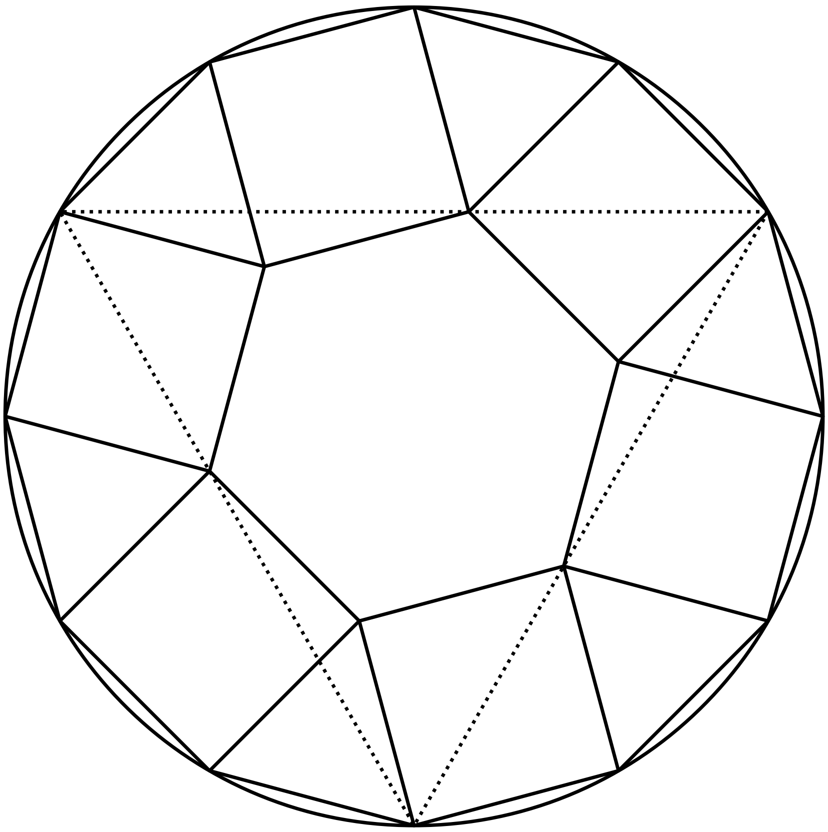
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

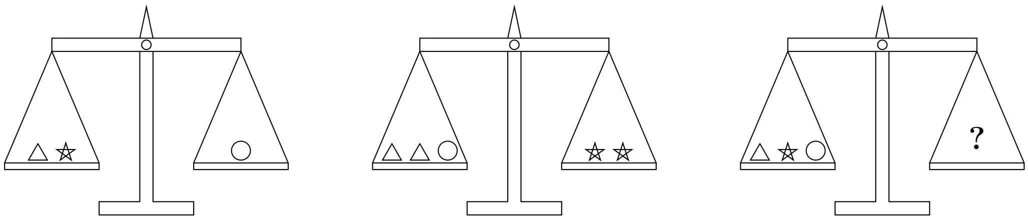
Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2023–2024

Svör og lausnir



Fyrsti hluti

1. Inga á þríhyrninga, stjörnur og hringi. Tvö form af sömu gerð vega það sama. Vogirnar tvær hér að neðan eru í jafnvægi. Hvaða valkost mætti setja í stað spurningamerkis á þriðju voginni þannig að hún sé í jafnvægi?



[ ] $\triangle\triangle\triangle\triangle\star$ [ ] $\triangle\triangle\triangle\star$ [✓] $\triangle\triangle\triangle\triangle\bigcirc$ [ ] $\triangle\triangle\triangle\bigcirc$

Skýring. Gefið er að

$$\triangle + \star = \bigcirc \tag{1.1}$$

og

$$2\triangle + \bigcirc = 2\star \tag{1.2}$$

Ef við setjum það sama báðum megin á þriðju vogina þá er hún í jafnvægi. Það er jafnan

$$\triangle + \star + \bigcirc = \triangle + \star + \bigcirc. \tag{1.3}$$

Bætum nú $\triangle + \star$ við hvora hlið og fáum nú

$$2\triangle + 2\star + \bigcirc = 2\triangle + 2\star + \bigcirc. \tag{1.4}$$

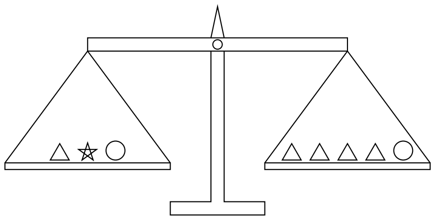
Notum nú jöfnur (1.1) annars vegar og (1.2) hins vegar til þess að skipta $\bigcirc$ út fyrir $\triangle + \star$ og $2\star$ út fyrir $2\triangle + \bigcirc$ í hægri hlið jöfnu (1.4). Þá fæst

$$2\triangle + 2\star + \bigcirc = 5\triangle + \star + \bigcirc \tag{1.5}$$

Fjarlægjum nú $\triangle + \star$ frá báðum hliðum og fáum því að lokum:

$$\triangle + \star + \bigcirc = 4\triangle + \bigcirc. \tag{1.6}$$

Sem má teikna sem



Þar sem $\bigcirc$ jafngildir $\triangle + \star$ þá er ljóst að $\bigcirc$ er þyngri en $\star$. Því er $\triangle\triangle\triangle\triangle\bigcirc$ þyngra en $\triangle\triangle\triangle\triangle\star$. Þar sem $\triangle\triangle\triangle\star$ hefur færri $\triangle$ en $\triangle\triangle\triangle\triangle\star$ þá er það einnig léttara en $\triangle\triangle\triangle\triangle\bigcirc$. Sömuleiðis er $\triangle\triangle\triangle\bigcirc$ léttar en $\triangle\triangle\triangle\triangle\bigcirc$. Þetta þýðir að $\triangle\triangle\triangle\triangle\bigcirc$ er þyngri en hinir valkostirnir og því eina rétta lausnin.

2. Í 16 manna teiti skáluðu allir gestir við alla hina nákvæmlega einu sinni. Hve oft var skálað?

[ ] 30 [✓] 120 [ ] 225 [ ] 240

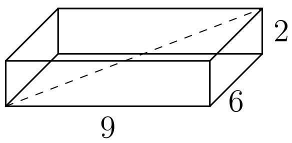
Skýring. Fyrsta hugmynd gæti verið að það sé nóg að velja tvö til að skála svo svarið væri $16 \cdot 15 = 240$. Þá erum við að velja eitt og svo einhvað annað til þess að skála. En þetta oftelur aðeins þar sem við gætum valið tvö á tvo vegu. Segjum að Jón og Gunna séu í boðinu. Þá gætum við fyrst valið Jón og svo Gunnu eða við gætum fyrst valið Gunnu og svo Jón. Því verðum við að deila með tveimur. Því er lokasvarið $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$.

3. Hvað er næsta ártal sem er frumtala?

[ ] 2025 [✓] 2027 [ ] 2028 [ ] 2031

Skýring. Nú eru $2025 = 5 \cdot 405$, $2028 = 2 \cdot 1014$ og $2031 = 3 \cdot 677$ allar samsettar svon eini valmöguleikinn er 2027 og hún er vissulega frumtala.

4. Askjan til hægri er rétthyrnd á alla kanta. Lengd hennar er 9, breidd hennar 6 og hæð hennar 2. Hver er lengd brotastriksins frá horni í gagnstætt horn?



[ ] 9 [ ] 10 [✓] 11 [ ] 12

Skýring. Af reglu Pýþagórasar fæst að lengd hornalínunnar er
$$\sqrt{9^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{81 + 36 + 4} = \sqrt{121} = 11.$$

5. Atli á helling af 1kr. 5kr. og 10kr. myntum. Hann langar í tyggjó sem kostar 25kr. Með hve mörgum ólíkum samsetningum getur hann borgað fyrir það?

[ ] 9 [ ] 10 [ ] 11 [✓] 12

Skýring. Þar sem heildarsumman er alltaf 25 kr. þá ákvarðast fjöld 1 kr. af 5 kr. og 10 kr. myntum. Við þurfum því aðeins að finna hve margar samsetningar af 10 kr. og 5 kr. hafa summ sem er ekki stærri en 25 kr. Hann getur haft enga, eina eða tvær 10 kr. mynntir.

1. Ef hann hefur enga 10 kr. mynnt þá getur hann valið 0 til 5 5kr. myntir. Það gefur 6 leiðir.

2. Ef hann velur eina 10 kr. mynnt þá getur hann valið 0 til 3 5 kr. mynntir. Það gefur 4 leiðir.

3. Ef hann velur tvær 10 kr. mynntir þá getur hann valið 0 til 1 5 kr. mynnt. Það gefur 2 leiðir.

Heildarfjöldi leiða til þess að fá 25kr. er því $6 + 4 + 2 = 12$.

6. Á myndinni til hægri er svörtum þíhyrningum raðað upp í fimm raðir. Það eru 15 svartir þríhyrningar og 10 hvítir. Við myndina er bætt nokkrum nýjum röðum og nú eru 276 svartir þríhyrningar. Hvað eru hvítu þríhyrningarnir nú margir?

[ ] 230 [ ] 242 [✓] 253 [ ] 276

Skýring. Segjum að það séu n línur. Í efstu línu er 1 svartur þríhyrningur og engin hvítur, í annari línu eru 2 svartir þríhyrningar og einn hvítur, o.s.frv. þar til að í n-tu línu eru n svartir þríhyrningar og $n-1$ hvítur. Það eru því $1+2+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ svartir þríhyrningar og $0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ hvítir. Nú eru svartir þríhyrningar $\frac{n\cdot(n-1)}{2}=276$ að tölu svo $n=24$. Því eru $\frac{24\cdot 23}{2}=253$ hvítir þríhyrningar.

7. Hvert eftirfarandi brota er næst $\frac{3}{5}$ á talnalínunni?

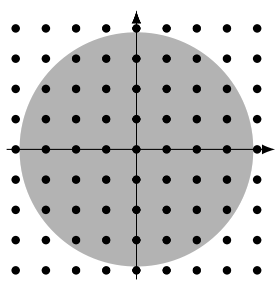
[ ] $\frac{2}{3}$ [ ] $\frac{3}{4}$ [✓] $\frac{5}{8}$ [ ] $\frac{5}{9}$

Skýring. Reiknum mismunina:

1. $\frac{3}{5}-\frac{2}{3}=\frac{-1}{15}$.
2. $\frac{3}{5}-\frac{3}{4}=\frac{-3}{20}$.
3. $\frac{3}{5}-\frac{5}{8}=\frac{-1}{40}$.
4. $\frac{3}{5}-\frac{5}{9}=\frac{2}{27}$.

Þar sem $\frac{1}{40}<\frac{1}{15}<\frac{2}{27}<\frac{3}{20}$ þá er ljóst að $\frac{5}{8}$ er næst $\frac{3}{5}$ á talnalínunni.

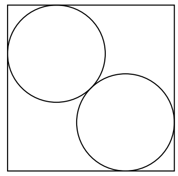
8. Skoðum hringskífu með miðju í $(0,0)$ og geisla af óþekktri lengd. Við teljum fjölda punkta (a,b) sem liggja innan í hringskífunni þannig að $a,b\in\mathbb{Z}$. Hvert af eftirfarandi gæti verið fjöldi punkta?



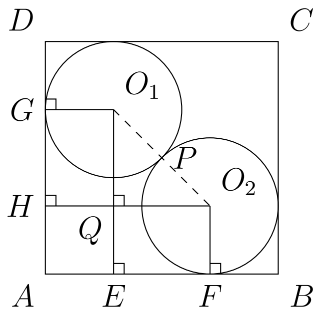
[✓] 2017 [ ] 2018 [ ] 2019 [ ] 2020

Skýring. Ef (a,b) er punktur með heiltöluhnit innan í hringnum er ljóst að fjórðungssnúningar hans, það eru punktarnir $(b,-a)$, $(-a,-b)$ og $(-b,a)$ líka á hringsskífunni. Þessir punktar eru allir ólíkir þá og því aðeins að þeir eru ekki allir $(0,0)$. Fjöldi heiltölupunkta á hringskífunni er því $4k+1$ fyrir $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Eina svarið sem kemur þá til greina er $2017=4\cdot 504+1$. (*Ef hringskífan hefur geisla af lengd* $\sqrt{641}$ *þá liggja* 2017 *punktar á hringskífunni*).

9. Tveir hringir innan í ferning snerta hvorn annan og tvær af hliðum ferningsins hvor. Hringirnir hafa báðir geisla af lengd 1. Hver er hliðarlengd ferningsins?



[ ] $1+\sqrt{2}$ [✓] $2+\sqrt{2}$ [ ] $2-\sqrt{2}$ [ ] $4+2\sqrt{2}$



Skýring. Köllum ferninginn $ABCD$ og gerum ráð fyrir að hringirnir ω_1 og ω_2 hafi miðjurnar O_1 og O_2. ω_1 snertir hliðarnar AB og BC og ω_2 snertir hliðarnar CD og DA. Látum E og F vera hornrétt ofanvörp O_1 og O_2 á AB og látum G og H vera ofanvörp O_1 og O_2 á DA. Látum Q vera skurðpunkt O_1E og O_2H. Köllum snertipunkt ω_1 og ω_2 P.

Ef við köllum hliðarlengd ferningsins x og geisla hringsins r ($r = 1$) þá sést að strikið AE hefur lengdina r þar sem AEO_1G er rétthyrningur og O_1G er geisli ω_1. Eins hefur strikið FB lengina r. Af þessu sést að strikið EF hefur lengdina $x-2r$. Þar sem EFO_2Q er rétthyrningur þá er lengd striksins O_2Q líka $x-2r$. Með sama hætti sést að lengd striksins O_1Q er líka $x-2r$. Þar sem strikið O_1O_2 skiptist í tvo geisla í punktinum P þá sést að það hefur lengd $2r$. Nú er þríhyrningurinn O_1QO_2 rétthyrndur með rétt horn í Q svo af relgu Pýþagórasar fæst að

$$|O_1Q|^2 + |O_2Q|^2 = |O_1O_2|^2,$$

það er

$$(x-2r)^2 + (x-2r)^2 = (2r)^2.$$

Einföldun gefur

$$2x^2 - 8rx + 4r^2 = 0.$$

Þetta er annars stigs jafna í x svo

$$x = \frac{8r \pm \sqrt{(8r)^2 - 4\cdot 2\cdot 4r^2}}{2\cdot 2} = \frac{8r \pm \sqrt{32r^2}}{4} = 2r \pm \sqrt{2}r.$$

Nú er $x > 2r$ svo við ályktum að $x = 2r + \sqrt{2}r$. Þar sem $r = 1$ þá er hliðarlengd ferningsins $x = 2 + \sqrt{2}$.

10. Ákvarðið gildi stærðarinnar $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$

[✓] $\sqrt{2}$ [ ] $\frac{1}{2}$ [ ] $\sqrt{3}$ [ ] $\frac{3}{2}$

Skýring. Setjum x jafnt stærðinni, fáum jöfnuna $x = 1 + \frac{1}{1+x}$ sem gefur $x^2 = 2$. Þar sem stærðin er jákvæð er svarið $\sqrt{2}$.

Annar hluti

11. Tveir mangarar eru jafn ríkir. Einn á 5 rúbína, 5 perlur og 90 gullpeninga. Hinn á 8 rúbína, 9 perlur og 48 gullpeninga. Rúbínar eru dýrari en perlur. Hvað er virði eins rúbíns og einnar perlu til samans í gullpeningum? [*Virði rúbína og perla eru bæði jákvæður heiltölufjöldi gullpeninga.*]

Svar: 13

Skýring. Gefið er að $5r + 5p + 90 = 8r + 9p + 48$ þar sem r táknar virði rúbíns í gullpeningum og p táknar virði perlu í gullpeningum. Þá fæst að $3r + 4p = 42$ þar sem $r > p$, færum yfir og þáttum í $4p = 3(14 - r)$. Þá sést að möguleg gildi á $14 - r$ eru $4, 8$ eða 12 því $r > 0$, sem samsvarar gildin $10, 6$ eða 2 á r. En skilyrðið $r > p$ útilokar að $r = 2$ og $r = 6$ og þá fæst að lokum $r = 10$ og $p = 3$. Svarið er því 13.

Þetta dæmi er frá Bhāskara I, Indverskum stærðfræðing uppi á 7. öld.

12. Hvað eru til margar heilar tölur n þannig að $(n+1)(n-2)$ deili $(n+3)(n-4)$?

Svar: 4

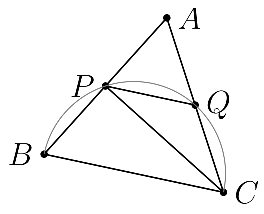
Skýring. Gerum ráð fyrir að $(n+3)(n-4) = k(n+1)(n-2)$ þar sem k er heiltala. Þá fæst að $k(n^2-n-2) = n^2-n-12 = n^2-n-2-10$, það er $(1-k)(n^2-n-2) = 10$ svo ljóst er að $n^2 - n - 2 = (n+1)(n-2)$ þarf að deila 10 og þar með einnig $(n+1)$ og $n-2$. Því er $n-2, n+1 \in \{\pm1, \pm2, \pm5, \pm10\}$ svo $n \in \{-8, -3, 0, 1, 3, 4, 7, 12\}$ og $n \in \{-11, -6, -3, -2, 0, 1, 4, 9\}$. Því er $n \in \{-3, 0, 1, 4\}$. Prófun leiðir í ljós að $(n+1)(n-2)$ gengur upp í $(n+3)(n-4)$ fyrir öll þessi gildi svo svarið er 4.

13. Í venjulegum spilastokki eru spil í 13 stærðum og hver stærð kemur fyrir í fjórum sortum (hjarta, spaða, tígli og laufi). Í spilinu Rommí er slagur 3 eða fleiri spil með sömu stærð eða slagur er 3 eða fleiri spil í röð af sömu sort. Hver er mesti fjöldi spila sem hægt er að hafa á hendi án þess að vera með slag?

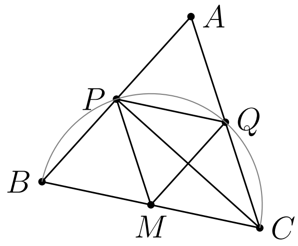
Svar: 26

Skýring. Ef við höfum 27 spil á hendi eða fleiri höfum við a.m.k. $3 = \lceil \frac{27}{13} \rceil$ (Það er stærstu heilu tölu fyrir ofan $\frac{27}{13}$) spil af einhverri stærð (skv. skúffureglu), og erum því með slag. Ef við höfum hjarta og tígul af öllum oddatölum og spaða og lauf af öllum sléttum tölum þá höfum við engan slag.

14. Þríhyrningur ABC er jafnhliða. Hálfhringurinn sem hefur miðstreng BC og liggur sömu megin miðstrengsins og A. Hann sker hliðarnar AB og AC í $P \neq B$ og $Q \neq C$. Hver er stærð hornins $\angle CPQ$ í gráðum talið?



Svar: 30

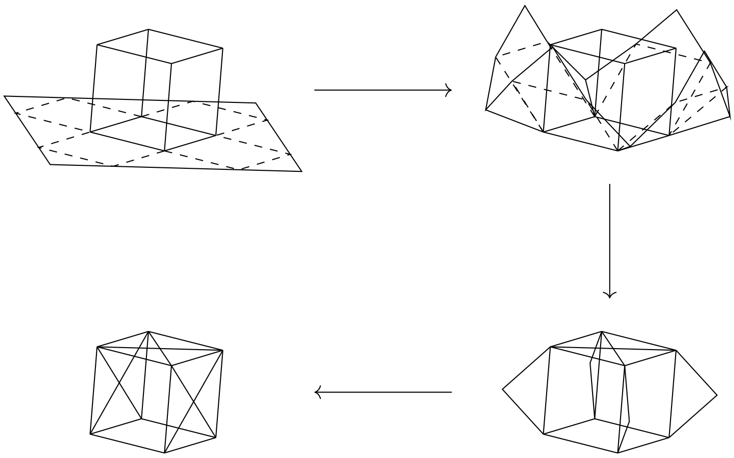


Skýring. Þar sem þríhyrningur ABC er jafnhliða þá eru stærðir allar horna hans $60°$. Látum M vera miðju hálfhringsins. Þar sem strikið BC er miðstrengur hans þá er M miðpunkur striksins. Þar sem B og P liggja á hálfhringunum þá eru strikin MB og MP jafnlöng. Því er þríhyrnungur BMP jafnarma svo hornin $\angle MBP$ og $\angle MPB$ eru jafnstór. Stærð þeirra beggja er því $60°$. Af reglu um hornasummu þríhyrninga sést að síðast hornið, $\angle BMP$ er einnig $60°$ af stærð. Þríhyrningurinn BMP er því jafnhliða. Eins má sjá að þríhyrningurinn CMQ er jafnhliða. Þar sem stærðir hornanna $\angle BMP$ og $\angle QMC$ eru báðar $60°$ þá sést að stærð hornins $\angle PMQ$ er einnig $60°$. Þar sem strikin MP og MQ eru jafnlöng þá sést að hornin $\angle MPQ$ og $\angle MQP$ eru jafnstór. Af reglu um hornasummu þríhyrninga fæst að $\angle MPQ$ og $\angle MQP$ eru bæði $60°$ af stærð. Því er þríhyrningurinn PMQ jafnhliða. Af þessu sést annars vegar að hornið $\angle CQP$ hefur stærð $120°$ og að strikin QC, QM og QP eru jafnlöng. Af þessu sést að þríhyrningur CQP er jafnarma og hornin $\angle CPQ$ og $\angle PCQ$ eru bæði $30°$ af stærð.

15. Tóta á tening með hliðarlengd 7. Hún á ferningslaga pappír sem hún ætlar að brjóta saman utan um tening (án þess að rífa) þannig að hann þeki allar hliðar teningsins. Brúnir pappírsins þurfa ekki að skarast. Pappírinn rétt dugar til að þekja teninginn. Hvert er flatarmál hans?

Svar: 392

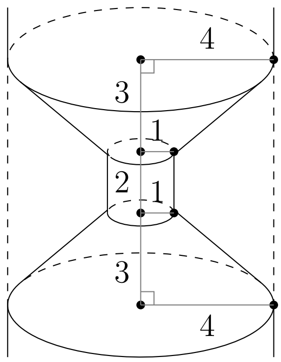
Skýring. Þar sem pappírinn nær allan hringinn í kringum teninginn þá er hægt að draga beint strik þannig að lengd þess sé ummál teningsins. Ummál teningsins er $4 \cdot 7 = 28$. Lengsta beina strik sem má draga innan í ferningi er hornalína hans. Því er hornalína ferningsins að minnsta kosti af lengd 28. Ferningur með slíka lengd hornalínu fæst með því að tengja saman miðpunkta hliða fernings með hliðarlengd 28 og flatarmál hans er því hálft flatarmál þess stærri. Flatarmál þess stærri er $28^2 = 784$ svo flatarmál pappírsins þarf að vera að minnsta kosti $784/2 = 392$. Brjóta má saman slíkan pappír utan um teninginn eins og sýnt er á mynd hér að neðan:



Þriðji hluti

16. Bjór er búinn að naga úr trjábol form sem sést á myndinni. Formið er snúningssamhverft og allir hringir eru í plani við jörðina, sem tréð stendur hornrétt á. Hvert er það rúmmál sem bjórinn hefur nagað burt?

[*Ábending:* Rúmmál keilu með hæð h og grunnflöt af radíus r er $\frac{1}{3}\pi h r^2$ og rúmmál sívalnings með sömu hæð og sama grunnflöt er $\pi h r^2$.]



Lausn. Rúmmál sívalningsins í heild er $(3+2+3)\cdot 4^2 \cdot \pi = 128\pi$. Ef við framlengjum keilurnar báðar sjáum við að þær snertast í miðju og hafa því hæð 4. Rúmmál keilanna er því $4/3 \cdot 4^2 \cdot \pi = 64\pi/3$ hvor, og hlutinn sem liggur inní smærri sívalningnum er $1/3 \cdot 1^2 \cdot \pi = \pi/3$ hvor. Loks er rúmmál smærri sívalningsins $2 \cdot 1^2 \cdot \pi = 2\pi$. Því er heildarrúmmálið $128\pi - 2 \cdot 64/3\pi + 2 \cdot \pi/3 - 2\pi = 84\pi$.

17. Sýnið að ef a, b, c, d eru rauntölur, stærri en 0, þá gildir

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4. \tag{17.1}$$

[*Ábending:* Ef x, y eru jákvæðar rauntölur þá gildir $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.]

Fyrsta lausn. Gerum ráð fyrir að $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Athugum að $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ og jöfnuður gildir ef og aðeins ef $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, það er $x = y$. Nú er

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy}.$$

Af þessu leiðir að

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \tag{17.2}$$

og jafnaðarmerki gildir ef og aðeins ef $x = y$. Með því að beita ójöfnu (17.2) þá fæst

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2\sqrt{\frac{a}{c}} \quad \text{og} \quad \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}} = 2\sqrt{\frac{c}{a}}. \tag{17.3}$$

Beitum ójöfnu (17.3) og fáum

$$\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 2\sqrt{1} = 2. \tag{17.4}$$

Ef við setjum ójöfnurnar í (17.3) og (17.4) þá fæst

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) \geq 2 \cdot 2 = 4.$$

Önnur lausn. Við setjum $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{b}{c}$, $x_3 = \frac{c}{d}$ og $x_4 = \frac{d}{a}$. Nú eru a, b, c og d jákvæðar svo x_1, x_2, x_3 og x_4 eru það líka. Þá getum við beitt ójöfnunni um venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal á x_1, x_2, x_3 og x_4 til að fá:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{d}\frac{d}{a}} = \sqrt[4]{1} = 1$$

Nú gefur margföldun með 4 að

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$$

18. Finnið öll $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ þannig að $11^k + 4^{k+1}$ sé frumtala.

Fyrsta lausn. Þetta gerist bara þegar $k = 0$. Látum $a_k = 11^k + 4^{k+1}$. Nú er $a_0 = 11^0 + 4^1 = 5$ og $a_1 = 11^1 + 4^2 = 27 = 3 \cdot 9$. Ef $k \in \mathbb{N}$ þá er

$$a_{k+2} = 11^{k+2}+4^{k+3} = 121\cdot 11^k+16\cdot 4^{k+1} = 16\cdot(11^k+4^{k+1})+105\cdot 11^k = 15\cdot a_k+3\cdot 5\cdot 7\cdot 11^k.$$

Af þessu sést að ef a_k er deilanleg með 3 þá er a_{k+2} það einnig. Eins er a_{k+2} deilanleg með 5 ef a_k er deilanleg með 5. Við sjáum þá að $a_0, a_2, a_4, \ldots$ eru allar deilanlegar með 5 og $a_1, a_3, a_5, \ldots$ eru allar deilanlegar með 3. Þetta sýnir að allar tölurnar $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eru deilanlegar með 3 eða 5. Því er a_k aðeins frumtala ef $a_k = 3$ eða $a_k = 5$. Nú er $a_k = 11^k + 4^{k1} \geq 11^1 + 4^{1+1} = 27 > 5$ ef $k \geq 1$ svo ljóst er að a_k er aldrei frumtala ef $k \geq 1$.

Önnur lausn. Við notum leifareikning.

Nú er
$$11^k + 4^{k+1} \equiv (-1)^k + 1^k \equiv 1 + (-1)^k \mod 3.$$
Því sést að 3 gengur upp í $11^k + 4^{k+1}$ ef og aðeins ef $(-1)^k \equiv -1 \mod 3$. Þetta jafngildir því að k sé oddatala.

Eins er
$$11^k + 4^{k+1} \equiv 1^k + (-1)^{k+1} \equiv 1 + (-1)^{k+1} \mod 5.$$
Því sést að 5 gengur upp í $11^k + 4^{k+1}$ ef og aðeins ef $(-1)^{k+1} \equiv -1 \mod 5$, það er $(-1)^k \equiv 1 \mod 5$. Það jafngildir því að k sé slétt.

Við sjáum því að annaðhvort 3 eða 5 gengur upp í allar tölur á forminu 11^k+4^{k+1}. Ef $k > 0$ þá er $11^k + 4^{k+1} \geq 27$ og er því ljóstlega samsett tala. Ef $k = 0$ þá er $11^k + 4^{k+1} = 5$ sem er frumtala. Því sést að $k = 0$ er eina talan þannig að $11^k + 4^{k+1}$ sé frumtala.

19. Andri og Björk spila leik þar sem í upphafi eru $n \geq 1$ hrúgur með $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$ steinum hver. Í hverri umferð velur leikmaður tölu $k \geq 1$. Leikmaðurinn á þá að velja k hrúgur og fjarlægja þær úr leiknum, og svo velja k aðrar hrúgur og skipta hverri í tvær ekki tómar hrúgur. Fyrsti leikmaður til að geta ekki leikið tapar. Fyrir hvaða $a_1, \ldots, a_n$ getur Andri unnið ef hann leikur fyrst?

[*Hlutstig fást ef dæmið er aðeins leyst þegar n er slétt tala eða oddatala.*]

Lausn. Ljóst er að lokastaðan er ávallt þegar einn steinn er eftir í hverri hrúgu. Skiptum í tilfelli eftir því hvort n er slétt, og byrjum á að skoða slétt n. Þá eru allar stöður með öll a_i odda tapstaða. Sjáum þetta á því að ef einhver er í stöðu með allt odda verður viðkomandi að búa til k hrúgur með sléttri tölu, sem hinn leikmaðurinn getur skipt upp til að setja fyrsta leikmanninn aftur í stöðu með allt odda. Með þrepun eru þetta því tapstöður. Þar sem n er slétt má fjarlægja allar sléttar hrúgur í einum leik, svo aðrar stöður eru ekki tapstöður.

Skoðum þá odda n. Látum $\rho(x)$ vera hversu oft 2 gengur upp í x. Nú eru allar stöður þar sem $\rho(a_1) = \rho(a_2) = \cdots = \rho(a_n)$ tapstöður. Lokastaðan uppfyllir þetta. Ef við byrjum í slíkri stöðu breytum við ρ gildi $2k$ hrúga, en einhverjar hrúgur eru óbreyttar því n er odda. Látum a_r vera hrúguna með minnsta ρ og l fjölda hrúga með strangt stærra ρ. Ef l er minni en helmingur hrúga getur hinn leikmaðurinn svarað með því að skipta þessum l hrúgum og henda l öðrum til að komast í stöðu þar sem öll gildin eru með sama ρ. Annars getur hann skipt $(n-1)/2$ af þessum l hrúgum, hent $(n-1)/2$ til viðbótar og bara skilið a_r eftir ósnert, og einnig komist í stöðu þar sem öll gildin hafa sama ρ. Niðurstaðan er að tapstöðurnar eru þær með fast ρ skv. þrepun.